

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques : analyse et approches

Niveau supérieur

Épreuve 1

8 mai 2023

Zone A après-midi | Zone B matin | Zone C après-midi

Numéro de session du candidat

2 heures

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.



Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

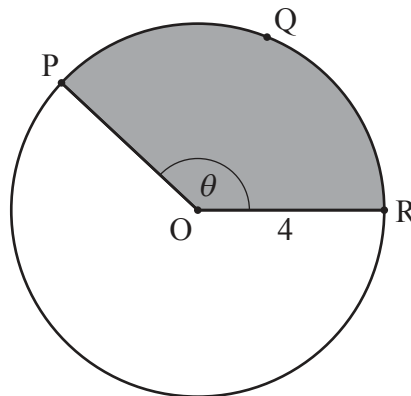
Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un cercle de centre O et dont le rayon mesure 4 cm.

la figure n'est pas à l'échelle



Les points P , Q et R sont situés sur la circonférence du cercle et $\widehat{POR} = \theta$, où θ est mesuré en radians.

La longueur de l'arc PQR est de 10 cm.

- (a) Trouvez le périmètre du secteur ombragé. [2]
- (b) Trouvez θ . [2]
- (c) Trouvez l'aire du secteur ombragé. [2]

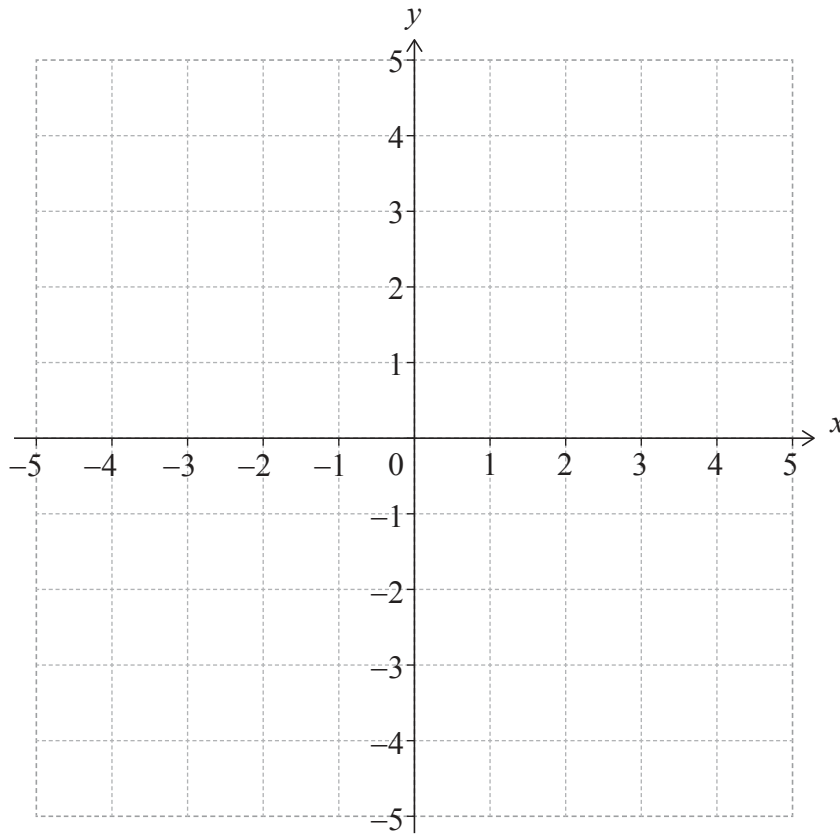
(Suite de la question à la page suivante)



(Suite de la question 2)

- (c) Sur le système d'axes suivant, esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$, en montrant toutes les caractéristiques trouvées dans les parties (a) et (b).

[1]



16EP05

Tournez la page

3. [Note maximale : 5]

Les événements A et B sont tels que $P(A) = 0,4$, $P(A|B) = 0,25$ et $P(A \cup B) = 0,55$.

Trouvez $P(B)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Note maximale : 7]

Utilisez la récurrence pour prouver que $\sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ pour tout entier $n \geq 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP10

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

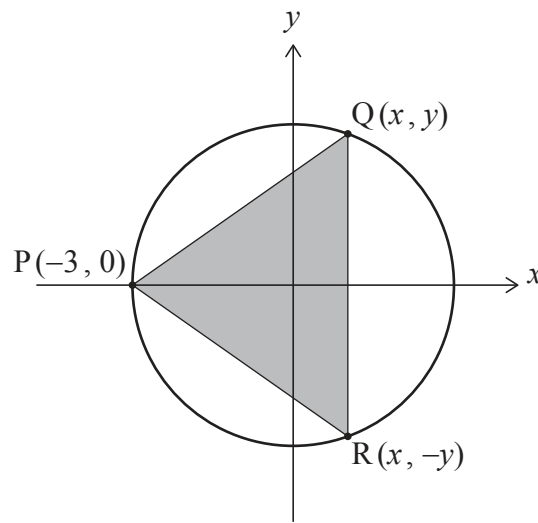
Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 14]

Un cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$ est centré au point $(0, 0)$ et son rayon mesure 3 unités.

Un triangle, PQR, est inscrit dans le cercle et ses sommets sont $P(-3, 0)$, $Q(x, y)$ et $R(x, -y)$, où Q et R sont des points variables du premier et du quatrième quadrant respectivement. Ceci est représenté dans le diagramme suivant.



- (a) Pour le point Q, montrez que $y = \sqrt{9 - x^2}$. [1]
- (b) À partir de là, trouvez une expression pour A , l'aire du triangle PQR, en fonction de x . [3]
- (c) Montrez que $\frac{dA}{dx} = \frac{9 - 3x - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$. [4]
- (d) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez l'ordonnée du point R telle que A est un maximum. [6]



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 22]

Considérez le nombre complexe $u = -1 + \sqrt{3}i$.

(a) En trouvant le module et l'argument de u , montrez que $u = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. [3]

(b) (i) Trouvez le plus petit entier positif n tel que u^n est un nombre réel.

(ii) Trouvez la valeur de u^n lorsque n prend la valeur trouvée dans la partie (b)(i). [5]

(c) Considérez l'équation $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$, où $z \in \mathbb{C}$.

(i) Sachant que u est une racine de $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$, trouvez les autres racines.

(ii) En utilisant une transformation appropriée de z à w , ou autrement, trouvez les racines de l'équation $1 + 5w + 10w^2 + 12w^3 = 0$, où $w \in \mathbb{C}$. [9]

(d) Considérez l'équation $z^2 = 2z^*$, où $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

En exprimant z sous la forme $a + bi$, trouvez les racines de l'équation. [5]



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

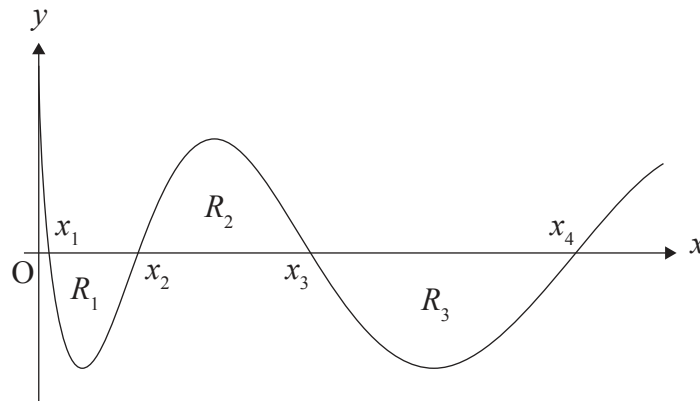
12. [Note maximale : 17]

(a) En utilisant un changement de variable approprié, montrez que

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C.$$

[6]

Le diagramme suivant montre une partie de la courbe $y = \cos \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$.



La courbe croise l'axe des abscisses en $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$.

Le $n^{\text{ième}}$ point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, x_n , est donné

$$\text{par } x_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \text{ où } n \in \mathbb{Z}^+.$$

(b) Écrivez une expression similaire pour x_{n+1} .

[1]

Les régions délimitées par la courbe et l'axe des abscisses sont dénotées par R_1, R_2, R_3, \dots , tel qu'illustré dans le diagramme ci-dessus.

(c) Calculez l'aire de la région R_n .

Donnez votre réponse sous la forme $kn\pi$, où $k \in \mathbb{Z}^+$.

[7]

(d) À partir de là, montrez que les aires des régions délimitées par la courbe et l'axe des abscisses, R_1, R_2, R_3, \dots , forment une suite arithmétique.

[3]

Références :

© Organisation du Baccalauréat International 2023



16EP15

Veillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.



16EP16